INSTITUCIÓN EDUCATIVA FEDERICO SIERRA ARANGO

Resoluciones Dptales. 15814 de 30/10/2002 - 9495 de 3/12/2001
NIT: 811039779-1 DANE: 105088001750
Bello - Antioquia

LÍMITES DE FUNCIONES - LÍMITES INDETERMINADOS		
ASIGNATURA: Matemáticas	**GRADO:** 11°	**FECHA:** Abril 19 al 30
TEMAS: Sucesiones aritméticas y geométricas.		**PERIODO:** 2
DOCENTE: Lina Marcela Mosquera Martínez		**SEMANAS:** 3 y 4
OBSERVACIONES: ✓ Enviar a través de la plataforma de CLASSROOM. ✓ Código de la clase 11-1: **iy3sgeq**, código de la clase 11-2: **6pgn7xw** ✓ El plazo máximo es hasta el día 30 de abril.		

Material tomado del libro de cálculo Trascendentes tempranas de Dennis Zill

LÍMITES DE FUNCIONES

Notación El análisis del concepto de límite se facilita al usar una notación especial. Si el símbolo de flecha $\rightarrow$ representa la palabra *tiende*, entonces el simbolismo

$$x \rightarrow a^- \text{ indica que } x \text{ tiende al número } a \text{ por la } \textit{izquierda},$$

es decir, a través de los números que son menores que a, y

$$x \rightarrow a^+ \text{ significa que } x \text{ tiende a } a \text{ por la } \textit{derecha},$$

es decir, a través de los números que son mayores que a. Finalmente, la notación

$$x \rightarrow a \text{ significa que } x \text{ tiende a } a \text{ desde } \textit{ambos lados},$$

en otras palabras, por la izquierda y por la derecha de a sobre una recta numérica. En la tabla izquierda en (2) se hace $x \rightarrow -4^-$ (por ejemplo, -4.001 está a la izquierda de -4 sobre la recta numérica), mientras en la tabla derecha $x \rightarrow -4^+$.

Límites laterales En general, una función $f(x)$ puede hacerse arbitrariamente próxima a un número L_1 al tomar x suficientemente cerca, pero sin que sea igual, a un número a por la *izquierda*; entonces se escribe

$$f(x) \rightarrow L_1 \text{ cuando } x \rightarrow a^- \qquad \text{o bien,} \qquad \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L_1. \tag{3}$$

Se dice que el número L_1 es el **límite por la izquierda de $f(x)$ cuando x tiende a a**. De manera semejante, si $f(x)$ puede hacerse arbitrariamente próxima a un número L_2 al tomar x suficientemente cerca a, pero diferente de, un número a por la *derecha*, entonces L_2 es el **límite por la derecha de $f(x)$ cuando x tiende a a** y se escribe

$$f(x) \to L_2 \text{ cuando } x \to a^+ \qquad \text{o bien,} \qquad \lim_{x \to a^+} f(x) = L_2. \tag{4}$$

Las cantidades en (3) y (4) también se denominan **límites laterales**.

Límites por dos lados Si tanto el límite por la izquierda $\lim_{x \to a^-} f(x)$ como el límite por la derecha $\lim_{x \to a^+} f(x)$ existen y tienen un valor común L,

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to a^+} f(x) = L,$$

entonces se dice que L es el **límite de $f(x)$ cuando x tiende a a** y se escribe

$$\lim_{x \to a} f(x) = L. \tag{5}$$

TALLER

En los puntos del 1 al 14 los puntos deben ser solucionados agregando la gráfica en GeoGebra. Los ejercicios 2, 4, 6, 8, 10, 12 y 14 serán resueltos por la profesora, los otros ejercicios deben ser solucionados por los estudiantes.

Fundamentos

En los problemas 1-14, trace la gráfica de la función para encontrar el límite dado, o concluya que no existe.

1. $\lim_{x \to 2}(3x + 2)$
2. $\lim_{x \to 2}(x^2 - 1)$
3. $\lim_{x \to 0}\left(1 + \frac{1}{x}\right)$
4. $\lim_{x \to 5}\sqrt{x - 1}$
5. $\lim_{x \to 1}\frac{x^2 - 1}{x - 1}$
6. $\lim_{x \to 0}\frac{x^2 - 3x}{x}$
7. $\lim_{x \to 3}\frac{|x - 3|}{x - 3}$
8. $\lim_{x \to 0}\frac{|x| - x}{x}$

9. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3}{x}$

10. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^4 - 1}{x^2 - 1}$

11. $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ donde $f(x) = \begin{cases} x + 3, & x < 0 \\ -x + 3, & x \geq 0 \end{cases}$

12. $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ donde $f(x) = \begin{cases} x, & x < 2 \\ x + 1, & x \geq 2 \end{cases}$

13. $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ donde $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x, & x < 2 \\ 1, & x = 2 \\ x^2 - 6x + 8, & x > 2 \end{cases}$

14. $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ donde $f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 0 \\ 2, & x = 0 \\ \sqrt{x} - 1, & x > 0 \end{cases}$

En los problemas 15-18, use la gráfica dada para encontrar el valor de cada cantidad, o concluya que no existe.

a) $f(1)$ *b*) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ *c*) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ *d*) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

15.

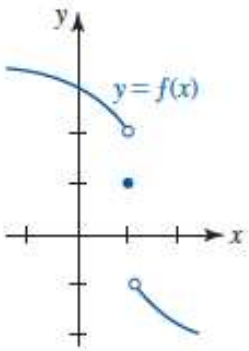

FIGURA 2.1.12 Gráfica para el problema 15

16.

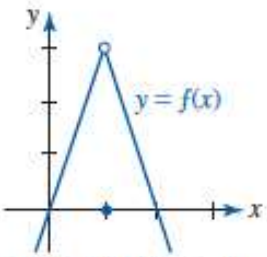

FIGURA 2.1.13 Gráfica para el problema 16

17.

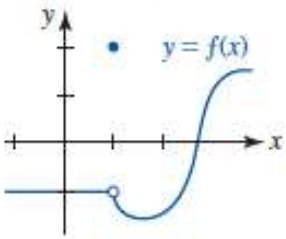

FIGURA 2.1.14 Gráfica para el problema 17

18.

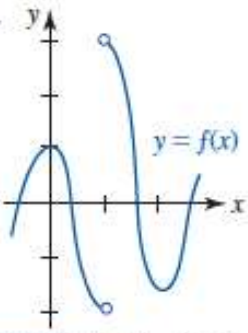

FIGURA 2.1.15 Gráfica para el problema 18